6. Na površi (sfera)

$$\vec{r} = (a\cos v \sin u, a \sin v \sin u, a \cos u), \quad u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi],$$

zadane su dvije krive c_1 i c_2 sa $c_1 : u = v$ i $c_2 : \overline{u} + \overline{v} = \frac{\pi}{2}$.

(a) Naći presječne tačke datih krivih.

(b) Odrediti ugao pod kojim se date krive sijeku.

7. Površ Γ definisana je vektorskom jednačinom

$$\vec{r} = (u \sin v,\ u \cos v,\ v).$$

Na površi je zadan krivoliniski trougao

$$0 \le u \le \mathrm{sh} v,\ 0 \le v \le v_0.$$

Izračunati uglove trougla.

13 Površina ograničenog dijela površi

Znamo da su koordinate brojevi uzeti u određenom redu i koji određuju položaj tačke na liniji, u ravni, na površi ili u prostoru. Zavisno od cilja i karaktera ispitivanja ovog ili onog objekta biraju se različiti koordinatni sistemi, pomoću kojih se svakoj tački prostora koordinira određen skup brojeva - koordinatne tačke. Na primjer, u nekoj oblasti ravni ili u cijeloj ravni se razmatraju dvije porodice linija $U(M) = \text{const.}$ i $V(M) = \text{const.}$, takve da se linije iste porodice ne sijeku među sobom, a svaka linija jedne porodice se siječe sa svakom linijom druge porodice u samo jednoj tački M. Brojevi $U(M)$ i $V(M)$ su onda koordinate tačke M u ravni. Ako su linije $U = \text{const.}$ i $V = \text{const.}$ prave, sistem koordina se naziva pravoliniski koordiatni sistem. Ako je jedna od linija porodica $U = \text{const.}$ i $V = \text{const.}$ kriva, ili ako su obe linije krive linije, koordinatni sistem se naziva krivoliniski ili Gausov koordinatni sistem.

Neka je dana površ S svojom jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ i na njoj zatvoreno područje (K). Tada se površina područja (K) računa po formuli

$$P = \iint\limits_{(K)} \mathrm{d}S = \iint\limits_{D} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

gdje je D zatvoreno područje u ravni takvo da je $\vec{r}(D) = (K)$.

Nije teško pokazati da vrijedi

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = \vec{r}_u^{\,2} \vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = EG - F^2.$$

Izraz

$$EG - F^2 = W^2$$

koji je uvijek pozitivan naziva se diskriminanta prve diferencijalne forme ili Weingartenova funkcija.

Primjetimo, ponovo, da jedinični vektor normale sada glasi

$$\vec{n}_0 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

8. Zadana je ploha $\vec{r}(u,v) = u\vec{a} + \sin u\vec{b} + v\vec{c}, u,v \in \mathbb{R}$ gdje su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ dati vektori.

(a) Ispitati šta su koordinatne krive.
(b) Odrediti koeficijente E, F i G prve kvadratne forme.
(c) Kada će se koordinatne krive ove plohe sijeći ortogonalno?
(d) Naći element površine $\mathrm{d}S$ dane plohe.

9. Naći površinu četverougla na helikoidu $x = a\,u \cos v$, $y = a\,u \sin v$, $z = b\,v$ (gdje su $u,v \in \mathbb{R}$), ograničenog krivima $u = 0$, $u = \frac{b}{a}$, $v = 0$, $v = 1$.

10. Naći površinu torusa $x = (a + b\cos u)\cos v$, $y = (a + b\cos u)\sin v$, $z = b\sin u$, $u,v \in [0,2\pi]$.

11. Površ Γ definisana je vektorskom jednačinom

$$\vec{r} = (u\sin v,\, u\cos v,\, v).$$

(a) Naći prvu kvadratnu formu površi.
(b) Na površi je zadan krivoliniski trougao

$$0 \le u \le \mathrm{sh} v,\ 0 \le v \le v_0.$$

Izračunati površinu i dužine strana trougla.

12. Odrediti izraz za površinu zatvorenog područja (K) na površi $z = z(x,y)$.

(#) Zadana je ploha

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{a} + \sin u\,\vec{b} + v\vec{c}, \quad u,v \in R$$

gdje su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zadani vektori.

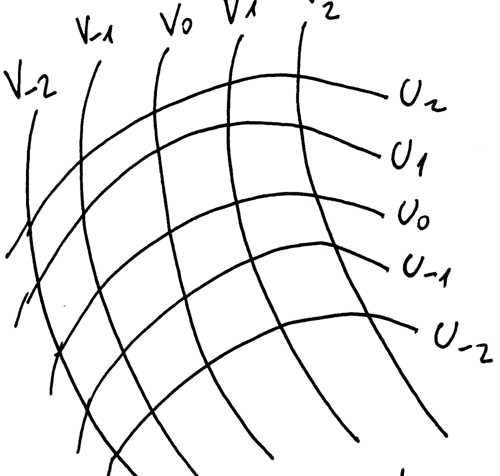
a) Ispitati što su koordinatne krivulje.

b) Odrediti koeficijente E, F i G prve kvadratne forme

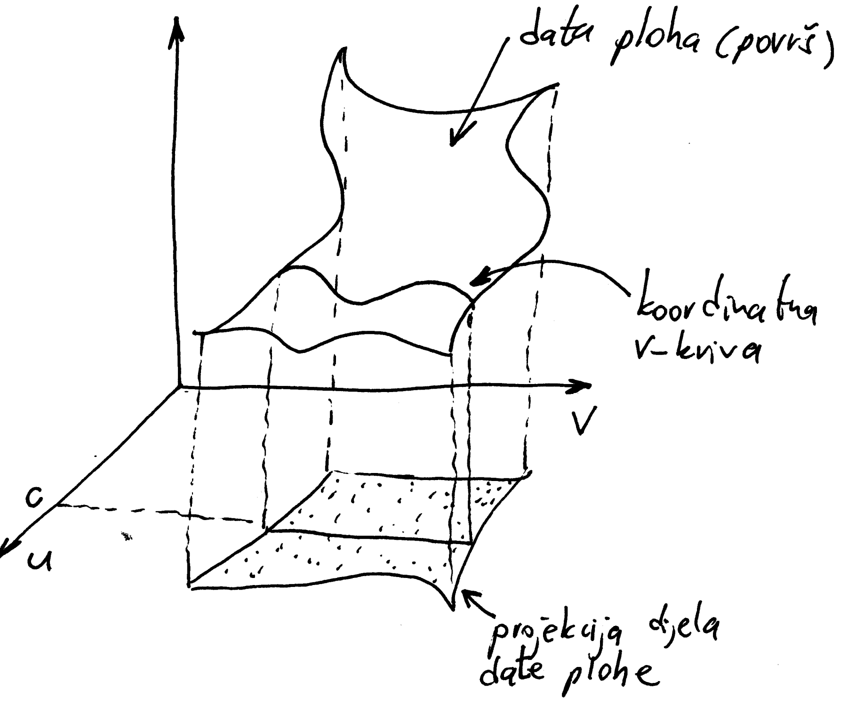
c) Kada će se koordinatne krive ove plohe sjeći ortogonalno?

d) Naći element površine dS dane plohe.

Rj. Znamo da su koordinate brojevi uzeti u određenom redu i koji određuju položaj tačke na liniji, u ravni, na površi ili u prostoru. Zavisno od cilja i karaktera ispitivanja ovog ili onog objekta biraju se različiti koordinatni sistemi, pomoću kojih se svakoj tački prostora koordinira određen skup brojeva – koordinatne tačke. Na primjer, u nekoj oblasti ravni ili u cijeloj ravni se razmatraju dvije porodice linija $U(M)=\text{const.}$ i $V(M)=\text{const.}$, takve da se linije iste porodice ne sijeku među sobom, a svaka linija jedne porodice se siječe sa svakom linijom druge porodice u samo jednoj tački M. Brojevi $U(M)$ i $V(M)$ su onda koordinate tačke M u ravni.



Ako su linije $U=\text{const.}$ i $V=\text{const.}$ prave, sistem koordinata se naziva pravolinijski koordinatni sistem. Ako je jedna od linija porodica $U=\text{const}$ ili $V=\text{const}$, ili ako su obe linije krive linije, koordinatni sistem se naziva krivolinijski ili Gaussov koordinatni sistem.

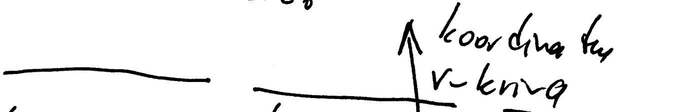


U našem slučaju postoje dvije koordinatne krive
a) v-kriva (v-krivulja)
b) u-kriva

Koordinatne v-krive dobijemo kada za u stavimo neku konstantu

$u = u_0 = \text{const.}$

$$\vec{r} = \underbrace{u_0 \vec{a} + \vec{b} \sin u_0}_{=\vec{r}_0} + v\vec{c}$$



Koordinatne u-krive dobijemo kada za v stavimo neku konst.

prava paralelna sa $\vec{c}$

$v = v_0 = \text{const}$

$$\vec{r} = u\vec{a} + \sin u\, \vec{b} + v_0 \vec{c}$$

kosa sinusoida u ravni ‖ ravni odred. sa vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$

koordinatne u-krive

b) Gausove fundamentalne veličine prvog reda

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (\vec{a} + \vec{b}\cos u)^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}\cos u$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{c}, \quad G = \vec{c}^{\,2}$$

c) $F = 0$ je uslov okomitosti koordinatnih u i v krivih tj.

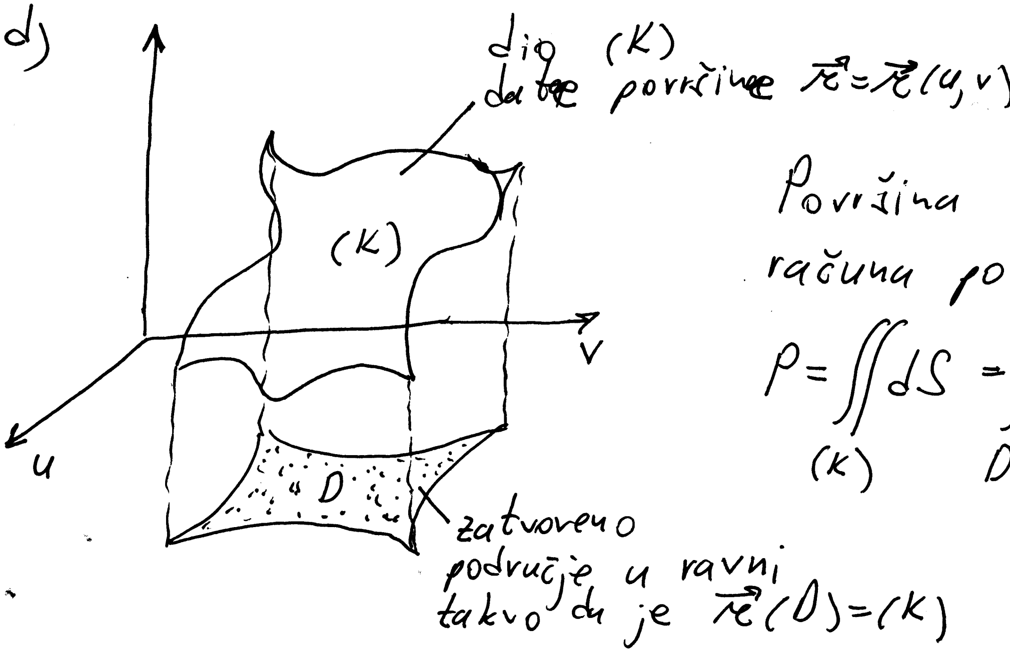
$\vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}\cos u = 0$ i ovo treba da vrijedi za $\forall u$,

Odavde možemo vidjeti da će ova jednakost biti zadovoljena (i da slijedi da je) za $\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ i $\vec{c}\cdot\vec{b} = 0$ tj. kada je

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ i } \vec{c} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{c} = k(\vec{a}\times\vec{b})$$

Za $\vec{c} = k(\vec{a}\times\vec{b})$ koordinatne krive će se sječi ortogonalno.

d)



Površina područja (K) se računa po formuli

$$P=\iint_{(K)} dS=\iint_{D} |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\, du\, dv$$

$$=\iint_{D} \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

U ovom slučaju mi tražimo element površine dS.

$$dS=|\vec{r}_u \times \vec{r}\,'_v|\, du\, dv$$

$$\vec{r}\,'_u=\vec{a}+\vec{b}\cos u$$

$$\vec{r}\,'_v=\vec{c}$$

$$dS=|(\vec{a}+\vec{b}\cos u)\times\vec{c}|\, du\, dv=|(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})\cos u|\, du\, dv$$

Ako su koordinatne krive međusobno ortogonalne, tada je $F=0$, pa je

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\, du\, dv=\sqrt{EG}\, du\, dv$$

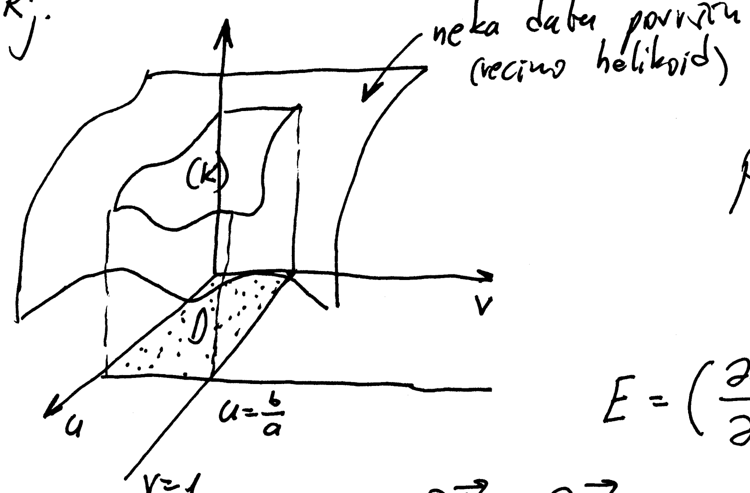
$$=k\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}\cos u)^2(\vec{a}\times\vec{b})^2}\, du\, dv$$

Naći površinu četverougla na helikoidu

$$x = au\cos v$$
$$y = au\sin v$$
$$z = bv, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

ograničenog krivima $u=0$, $u=\frac{b}{a}$, $v=0$, $v=1$.

Rj.



$$P = \iint\limits_{(K)} dS = \iint\limits_{D} \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (a\cos v)^2 + (a\sin v)^2 + 0 = a^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (a\cos v, a\sin v, 0)(-au\sin v, au\cos v, b)$$
$$= -a^2u\sin v\cos v + a^2u\sin v\cos v + 0 = 0$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 = a^2u^2\sin^2 v + a^2u^2\cos^2 v + b^2 = a^2u^2 + b^2$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{a^2(a^2u^2+b^2) - 0^2} = a\sqrt{a^2u^2+b^2}$$

$$P = \iint\limits_{D} a\sqrt{a^2u^2+b^2}\, du\, dv = a\int_0^{\frac{b}{a}} \sqrt{a^2u^2+b^2}\, du \int_0^1 dv = a\int_0^{\frac{b}{a}} \sqrt{a^2u^2+b^2}\, du$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \frac{b}{a}s \\ u^2 = \frac{b^2}{a^2}s^2 \quad u\Big|_0^{\frac{b}{a}} \Rightarrow s\Big|_0^1 \\ du = \frac{b}{a}ds \end{array} \right| = a\int_0^1 \sqrt{b^2s^2+b^2}\, \frac{b}{a}\, ds = b^2\int_0^1 \sqrt{s^2+1}\, ds$$

$$= -\int\sqrt{s^2+1}\,ds + \int\frac{ds}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\int_0^1 \sqrt{s^2+1}\, ds = \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{s^2+1} & dv = ds \\ du = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}ds & v = s \end{array} \right| = s\sqrt{s^2+1} - \int \frac{s^2+1-1}{\sqrt{s^2+1}}\, ds$$

tražena površina

$$\Rightarrow 2\int_0^1 \sqrt{s^2+1}\, ds = s\sqrt{s^2+1} + \int\frac{ds}{\sqrt{s^2+1}} = s\sqrt{s^2+1} + \ln|s+\sqrt{s^2+1}| + C \Rightarrow P = \frac{b^2}{2}\left[\sqrt{2} + \ln|1+\sqrt{2}|\right]$$

(#) Naći površinu torusa

$$x=(a+b\cos u)\cos v,\quad y=(a+b\cos u)\sin v,\quad z=b\sin u,\quad u,v\in[0,2\pi].$$

Rj.

$$P=\iint_{(K)} dS=\iint_{D} |\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'|\,du\,dv=\iint_{D}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

gdje je (K) zatvoreno područje na torusu, D zatvoreno područje u ravni takvo da $\vec{r}(D)=(K)$, a $\vec{r}$ je vektorska jednačina torusa

$$\vec{r}=((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ b\sin u).$$

$$\vec{r}_u'=(-b\sin u\cos v,\ -b\sin u\sin v,\ b\cos u)$$

$$\vec{r}_v'=(-(a+b\cos u)\sin v,\ (a+b\cos u)\cos v,\ 0)$$

$$E=\vec{r}_u'^{\,2}=\underline{b^2\sin^2u}\cos^2v+\underline{b^2\sin^2u}\sin^2v+b^2\cos^2u=$$

$$=b^2\sin^2u+b^2\cos^2u=b^2$$

$$F=\vec{r}_u'\cdot\vec{r}_v'=b(a+b\cos u)\sin u\sin v\cos v-b(a+b\cos u)\sin u\sin v\cos v=0$$

$$G=\vec{r}_v'^{\,2}=(a+b\cos u)^2\sin^2v+(a+b\cos u)^2\cos^2v=(a+b\cos u)^2$$

$$P=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\iint_D b(a+b\cos u)\,du\,dv=b\int_0^{2\pi}du\int_0^{2\pi}(a+b\cos u)\,dv=$$

$$=b\int_0^{2\pi}\left(av\Big|_0^{2\pi}+bv\Big|_0^{2\pi}\cos u\right)du=2\pi b\int_0^{2\pi}(a+b\cos u)\,du=2\pi b\left(au\Big|_0^{2\pi}+b\sin u\Big|_0^{2\pi}\right)$$

$$=4\pi^2ab$$ tražena površina

(#) Površ Γ definisana je vektorskom jednačinom

$$\vec{r} = (u \sin v,\ u \cos v,\ v)$$

a) Naći prvu kvadratnu formu površi.

b) Na površi je zadan krivolinijski trougao

$$0 \le u \le \operatorname{sh} v, \qquad 0 \le v \le v_0$$

Izračunati površinu, dužine strana i uglove trougla.

Rj:

a) Prva kvadratna forma površi je

$$F_1 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

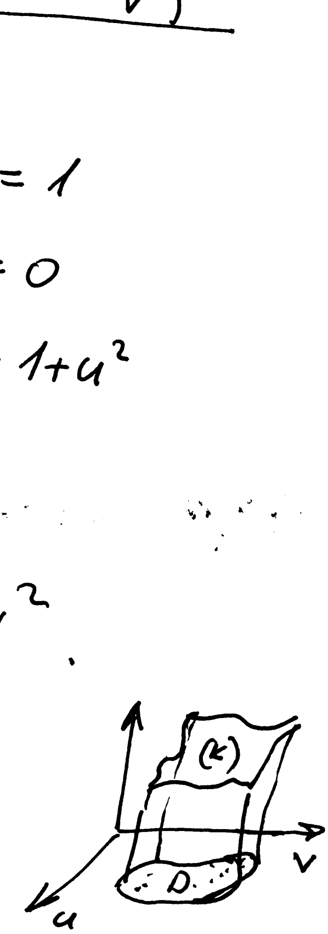
$$E = (\vec{r}\,'_u)^2, \quad F = (\vec{r}\,'_u \cdot \vec{r}\,'_v), \quad G = (\vec{r}\,'_v)^2$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}\,'_u &= (\sin v,\ \cos v,\ 0) \\ \vec{r}\,'_v &= (u\cos v,\ -u\sin v,\ 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} E &= 1 \\ F &= 0 \\ G &= 1+u^2 \end{aligned}$$

Prva kvadratna forma je

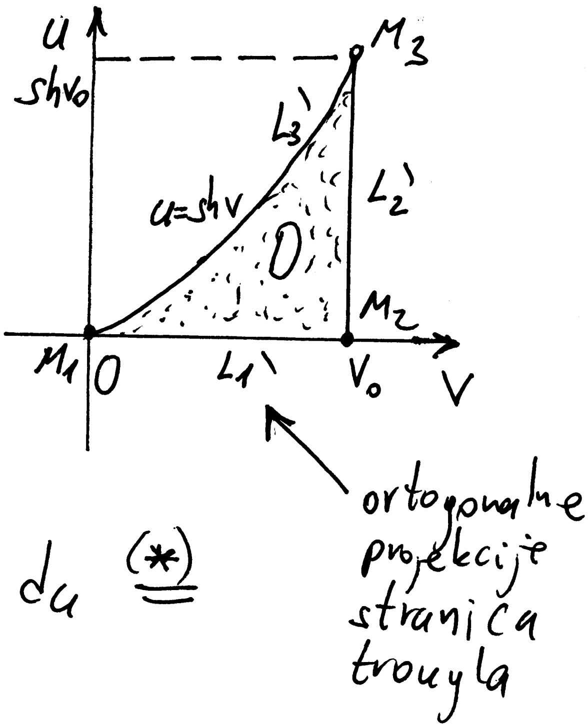
$$F_1 = ds^2 = du^2 + (1+u^2)\,dv^2$$

b) Površinu dijela površi računamo po formuli:



$$P = \iint\limits_{(K)} dS = \iint\limits_{D} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

Oblast D nije teško skicirati



$$D: \begin{cases} 0 \le u \le shv \\ 0 \le v \le v_0 \end{cases}$$

U našem slučaju je

$$P = \iint_D \sqrt{1+u^2}\, du\, dv = \int_0^{v_0} dv \int_0^{shv} \sqrt{1+u^2}\, du \overset{(*)}{=}$$

$$\int \sqrt{1+u^2}\, du = \underset{\dots}{\text{ZA VJEŽBU}} = \frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})$$

$$\int_0^{shv} \sqrt{1+u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}\Big|_0^{shv} + \frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\Big|_0^{shv} =$$

$$= \frac{1}{2} shv\sqrt{1+sh^2 v} + \frac{1}{2}\ln(shv + \sqrt{1+sh^2 v}) =$$

(Znamo da je $1+sh^2 v = ch^2 v$)
$chv \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}$

$$= \frac{1}{2} shv|chv| + \frac{1}{2}\ln(shv+chv)$$
$$= \frac{1}{2} shv \cdot chv + \frac{1}{2}\ln(shv+chv)$$

$$\overset{(*)}{=} \int_0^{v_0}\left(\frac{1}{2} shv\, chv + \frac{1}{2}\ln(shv+chv)\right) dv = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{v_0} shv\, chv\, dv}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{v_0} \ln(shv+chv)\, dv}_{I_2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{v_0} shv\, chv\, dv = \frac{1}{2}\int_0^{v_0} shv\, d(shv) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} sh^2 v\Big|_0^{v_0} = \frac{1}{4} sh^2 v$$

$$shx + chx = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$$

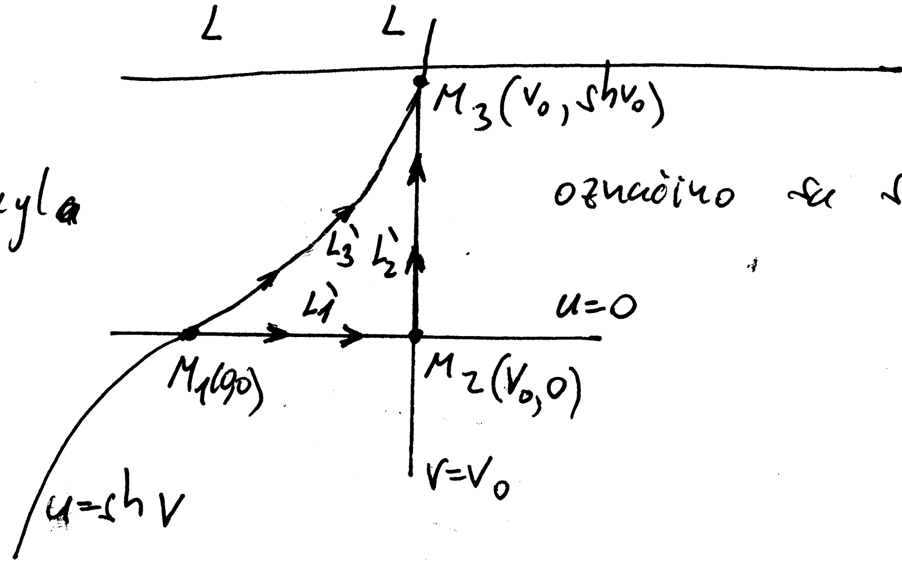
$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{v_0} \ln(e^v)\,dv = \frac{1}{2}\int_0^{v_0} v\,dv = \frac{1}{4}v^2\Big|_0^{v_0} = \frac{1}{4}v_0^2$$

Prema tome $\quad P = \frac{1}{4}\left(v_0^2 + sh^2 v_0\right)$ tražena površina

Dužina luka L se računa po obrascu

$$s = \int_L ds = \int_L \sqrt{du^2 + (1+u^2)\,dv^2}$$

Dužine stranica trougla označimo sa s_1, s_2 i s_3



$$s_1 = \int_{L_1} ds = \int_{L_1} \sqrt{du^2 + (1+u^2)dv^2} = \int_0^{v_0} dv = v_0$$

$$s_2 = \int_{L_2} \sqrt{du^2 + (1+u^2)\,dv^2} = \left| \begin{array}{l} L_2:\ v = v_0 \\ dv = 0 \end{array} \right| = \int_0^{shv_0} du = shv_0$$

$$s_3 = \int_{L_3} \sqrt{du^2 + (1+u^2)dv^2} = \left| \begin{array}{l} u = shv \\ du = chv\,dv \\ du^2 = ch^2v\,dv^2 \end{array} \right| = \int_0^{v_0} \sqrt{ch^2v + 1 + sh^2v}\,dv =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{znamo da} \\ 1+sh^2 v = ch^2 v \end{matrix} \right| = \sqrt{2} \int_0^{v_0} ch\, v \, dv = \sqrt{2}\, sh\, v_0$$

Dužine strana $\sqrt{\text{krivolinijskog}}$ trougla na datoj površini su

$$s_1 = v_0, \quad s_2 = sh\, v_0, \quad s_3 = \sqrt{2}\, sh\, v_0$$

Jednačine stranica krivolinijskog trougla su

L_1: $\vec{r}_1 = (0, 0, v)$, $0 \le v \le v_0$

L_2: $\vec{r}_2 = (u \sin v_0, u \cos v_0, v_0)$, $0 \le u \le sh\, v_0$

L_3: $\vec{r}_3 = (sh\, v \sin v, sh\, v \cos v, v)$, $0 \le v \le v_0$

Presječna tačka stranica L_1 i L_2 je $M_1(v_0, 0)$, stranica L_1 i L_3 je $M_2(0,0)$ i L_2 i L_3 je $M_3(v_0, sh\, v_0)$

Stoga je
$$\cos\varphi_1 = \left.\frac{\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2}{|\dot{\vec{r}}_1||\dot{\vec{r}}_2|}\right|_{M_1} \overset{\text{za vježbu}}{=} 0$$

$$\cos\varphi_2 = \left.\frac{\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_3}{|\dot{\vec{r}}_1||\dot{\vec{r}}_3|}\right|_{M_2} = \dots^{\text{za vježbu}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left.\frac{\dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_3}{|\dot{\vec{r}}_2|\cdot|\dot{\vec{r}}_3|}\right|_{M_3} = \cos\varphi_3$$

i $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\pi}{4}$ traženi uglovi

\# Odrediti izraz za površinu zatvorenog područja (K) na plohi $z = z(x,y)$.

Rj. Jednačina plohe ima vektorsku jednačinu

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x,y)\vec{k}.$$

Kako je
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, z'_x)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, z'_y) \quad ,$$

Ako uvedemo oznaku $p = z'_x$ i $q = z'_y$ Gausove fundamentalne veličine prvog reda su

$$E = 1+p^2, \quad F = pq, \quad G = 1+q^2$$

$$P = \iint_{(K)} dS = \iint_{D} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

$$EG - F^2 = (1+p^2)(1+q^2) - p^2q^2 = 1 + p^2 + q^2$$

Prema tome površinu zatvorenog područja (K) možemo izračunati po formuli

$$P = \iint_{D} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy$$

dvostruki integral

gdje je D područje u ravni xOy za koje je $\vec{r}(D) = (K)$ (istu formulu smo imali u Analizi III kod primjene površinskog integrala I vrste).